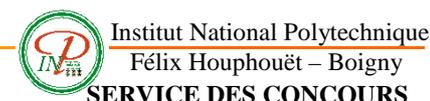




Concours GE2I/GMEC session 2015

Composition : **Mathématiques 4** (analyse)

Durée : **4 Heures**



Partie 1 : ANALYSE

A)

1) On considère la fonction Γ de Euler définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

- Déterminer son ensemble de définition.
- Justifier que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$. En déduire que pour tout entier naturel n on a : $\Gamma(n+1) = n!$.
- Montrer que Γ est de classe C^1 sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Montrer qu'il existe un nombre réel d de l'intervalle $]1; 2[$ tel que $\Gamma'(d) = 0$.
- En déduire que la fonction Γ est strictement croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

2) Énoncer la formule de Taylor avec reste intégrale pour une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I non vide et non réduit à un point.

B) Application du développement en série entière

On rappelle que si une fonction f est développable en série entière sur l'intervalle $] -a; a [$ avec $a > 0$, alors f est de classe C^∞ sur $] -a; a [$ et son développement en série entière est unique donné par la série de Taylor de f à l'origine :

$$\forall x \in]-a; a[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

1) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(0) = 1$ et, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, pour $x \neq 0$.

Démontrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

2) Un théorème des moments.

Soit f une fonction développable en série entière sur $] -R; R [$ avec $R > 1$:

$$\forall x \in]-R; R[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

On suppose, que pour tout entier naturel n , $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$.

- Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} \left(f(x) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right) x^n$ est normalement convergente sur $[0; 1]$.
- A l'aide du calcul de $\int_0^1 (f(x))^2 dx$, démontrer que la fonction f est nulle sur l'intervalle $[0; 1]$.
- Démontrer que f est la fonction nulle sur l'intervalle $] -R; R [$.

3) Un contre-exemple

On considère la fonction f telle que pour tout x réel $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx^2} dt$. Démontrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} . On admet que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et que l'on obtient les dérivées successives en dérivant sous le signe intégrale.

- Pour $t \in]0; +\infty[$, calculer, au moyen d'une série entière, les dérivées successives en zéro de la fonction : $x \mapsto \frac{e^{-t}}{1+tx^2}$ pour en déduire l'expression de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right) x^n$?
La fonction f est-elle développable en série entière ?

PARTIE 2 : PROBABILITES

Exercice 1:

Soit $f : \Omega \rightarrow \Gamma$ une application et A, B des événements de Σ une tribu de Γ .

- 1) Comparer $f^{-1}(\overline{A})$ et $\overline{f^{-1}(A)}$; puis $f^{-1}(A \cup B)$ et $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
- 2) Montrer que $f^{-1}(\Sigma) = \{f^{-1}(B) / B \in \Sigma\}$ est une tribu d'événements de Ω .

Exercice 2:

Trois maladroits tirent sur un objectif. Chacun n'a qu'une seule balle.

Le premier a trois chances sur quatre pour atteindre l'objectif, le second deux chances sur trois et le troisième une chance sur deux seulement.

L'objectif a-t-il alors plus de chances de recevoir une seule balle ou les trois balles ?

Exercice 3:

Déterminer la loi de probabilité, l'espérance mathématique et l'écart-type de la variable aléatoire X dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 1 \\ 1/5, & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 4/5, & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ 1, & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

Exercice 4:

Une pièce d'un équipement électronique est constituée de trois parties essentielles A, B et C .

On a constaté dans le passé que la partie A tombait en panne dans 10% des cas, la partie B dans 30% des cas et la partie C dans 40% des cas.

La partie A opère indépendamment de B et de C .

Les parties B et C sont dépendantes de telle sorte que si C est défectueuse, les chances sont de 1 sur 3 que B soit défectueuse aussi.

Deux au moins des trois parties doivent être en état de marche pour que l'équipement fonctionne.

Calculer la probabilité pour qu'il fonctionne.