MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE L'EMPLOYABILITE **(DGESE)**

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
*Union - Discipline - Travail*

Institut National Polytechnique
Félix Houphouët – Boigny
SERVICE DES CONCOURS

# Concours GE2I/GMEC session 2015

**Composition : Mathématiques 4 (analyse)**

**Durée : 4 Heures**

## Partie 1 : ANALYSE

### A)

**1)** On considère la fonction $\Gamma$ de Euler définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

a) Déterminer son ensemble de définition.

b) Justifier que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. En déduire que pour tout entier naturel n on a : $\Gamma(n+1) = n\,!$ .

c) Montrer que $\Gamma$ est de classe $C^1$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Montrer qu'il existe un nombre réel d de l'intervalle $]1\,;2[$ tel que $\Gamma'(d) = 0$.

d) En déduire que la fonction $\Gamma$ est strictement croissante sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

**2)** Enoncer la formule de Taylor avec reste intégrale pour une fonction de classe $C^{\infty}$ sur un intervalle I non vide et non réduit à un point.

### B) Application du développement en série entière

On rappelle que si une fonction f est développable en série entière sur l'intervalle $]-a\,;a[$ avec $a > 0$, alors f est de classe $C^{\infty}$ sur $]-a\,;a[$ et son développement en série entière est unique donné par la série de Taylor de f à l'origine :

$$\forall x \in ]-a\,;a[ \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 1$ et, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, pour $x \neq 0$ .

Démontrer que f est de classe $C^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$.

**2) Un théorème des moments.**

Soit f une fonction développable en série entière sur$]-R\,;R[$ avec $R > 1$ :

$$\forall x \in ]-R\,;R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

On suppose, que pour tout entier naturel n, $\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$.

a) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 0}\left(f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)x^n$ est normalement convergente sur $[0\,;1]$.

b) A l'aide du calcul de $\int_0^1 (f(x))^2dx$, démontrer que la fonction f est nulle sur l'intervalle $[0\,;1]$.

c) Démontrer que f est la fonction nulle sur l'intervalle $]-R\,;R[$.

**3) Un contre - exemple**

On considère la fonction f telle que pour tout x réel $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx^2}dt$. Démontrer que f est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. On admet que f est de classe $C^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on obtient les dérivées successives en dérivant sous le signe intégrale.

a) Pour $t \in ]0\,;+\infty[$, calculer, au moyen d'une série entière, les dérivées successives en zéro de la fonction : $x \longmapsto \frac{e^{-t}}{1+tx^2}$ pour en déduire l'expression de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)x^n$ ?
La fonction f est – elle développable en série entière ?

# PARTIE 2 : PROBABILITES

## Exercice 1:

Soit $f:\Omega \to \Gamma$ une application et A, B des événements de $\Sigma$ une tribu de $\Gamma$ .

1) Comparer $f^{-1}(\overline{A})$ et $\overline{f^{-1}(A)}$ ; puis $f^{-1}(A \cup B)$ et $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

2) Montrer que $f^{-1}(\Sigma) = \left\{ f^{-1}(B)\ /\ B \in \Sigma \right\}$ est une tribu d'événements de $\Omega$ .

## Exercice 2:

Trois maladroits tirent sur un objectif. Chacun n'a qu'une seule balle.

Le premier a trois chances sur quatre pour atteindre l'objectif, le second deux chances sur trois et le troisième une chance sur deux seulement.

L'objectif a-t-il alors plus de chances de recevoir une seule balle ou les trois balles ?.

## Exercice 3:

Déterminer la loi de probabilité, l'espérance mathématique et l'écart-type de la variable aléatoire $X$ dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F(t) = \begin{cases} 0 \text{ , si } t < 1 \\ 1/5 \text{ , si } 1 \le t < 2 \\ 4/5 \text{ , si } 2 \le t < 3 \\ 1 \text{ , si } t \ge 3 \end{cases}$$

## Exercice 4:

Une pièce d'un équipement électronique est constituée de trois parties essentielles A,B et C.

On a constaté dans le passé que la partie A tombait en panne dans 10% des cas, la partie B dans 30% des cas et la partie C dans 40% des cas.

La partie A opère indépendamment de B et de C.

Les parties B et C sont dépendantes de telle sorte que si C est défaillante, les chances sont de 1 sur 3 que B soit défaillante aussi.

Deux au moins des trois parties doivent être en état de marche pour que l'équipement fonctionne.

Calculer la probabilité pour qu'il fonctionne.